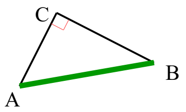
Théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore :



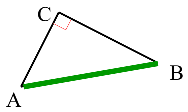
Triangle rectangle en C $\rightarrow$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Conséquence : On peut prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.

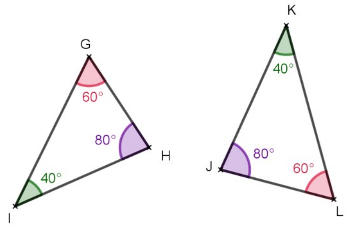
$AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ $\rightarrow$ ABC n'est pas rectangle en C.

Réciproque du théorème de Pythagore :

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ $\rightarrow$ Triangle rectangle en C



Triangles semblables



Deux triangles sont **semblables** lorsque leurs **angles** sont deux à deux de **même mesure**.

Propriétés :

- Si deux triangles sont **semblables** alors les côtés opposés aux angles égaux ont des longueurs deux à deux **proportionnelles**.

- Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles alors ces triangles sont **semblables**.

Exemple :

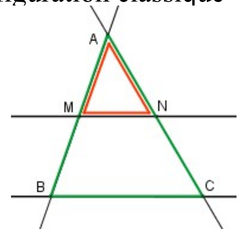
Longueurs du triangles ABC	7,2	8,2	8,8
Longueurs du triangles DEF	10,8	12,3	13,2

× 1,5

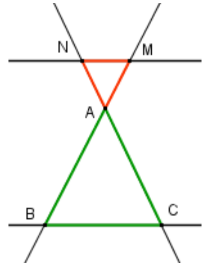
$\frac{10,8}{7,2} = 1,5$ $\frac{12,3}{8,2} = 1,5$ $\frac{13,2}{8,8} = 1,5$

Théorème de Thalès

Configuration classique



Configuration en papillon



Théorème de Thalès :

- (BM) et (CN) sont sécantes en A.
- (BC) // (MN)

Alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Contraposée : On peut prouver que deux droites ne sont pas parallèles.

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Réciproque du théorème de Thalès :

- les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont **alignés dans le même ordre.**
- $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

Alors : les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Identités remarquables

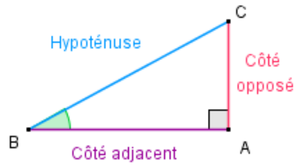
Distributivité : $k\ (a + b) = k\,a + k\,b$ et $k\ (a - b) = k\,a - k\,b$

Double distributivité : $(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Trigonométrie



Triangle rectangle en A → SOH CAH TOA

Sin $\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$; Cos $\widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$; Tan $\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$

Touches de la calculatrice :

- Pour calculer une longueur : « sin » , « cos », « tan »
- Pour calculer un angle : « Arcsin », « Arccos », « Arctan »

Exemple : sin $\widehat{ABC} = \frac{3}{4}$ → ABC = Arcsin ($\frac{3}{4}$) ≈ 48,6°

Nombres premiers

Nombre premier : nombre entier qui n'a que 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 …

Nombres premiers entre eux : lorsque leur seul diviseur commun est 1.

$\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque a et b sont premiers entre eux.

Exemple : PGCD(84;30) = 6 donc $\frac{84}{30} = \frac{84 \div 6}{30 \div 6} = \frac{14}{5}$.

« Le plus grand nombre de lots identiques de choses » → PGCD

Exemple : 15 = 3 × 5 ; 35 = 7 × 5
PGCD (15 ; 35) = 5 et PPCM (15 ; 35) = 3 × 5 × 7 = 105

Touches de la calculatrice : « Décomp » , « PGCD », « PPCM »

Équations

- Pour résoudre une équation, on peut :

- ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres de l'équation.
- multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre non nul.

Exemple :

$$4x - 5 = 7$$
$$4x - 5 + 5 = 7 + 5$$
$$4x = 12$$
$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4}$$
$$x = 3$$

Vérification : 4 × 3 – 5 = 12 – 5 = 7.
La solution de l'équation $4x - 5 = 7$ est 3.

Équation produit nul :
$(3x + 2)(7x - 9) = 0$ revient à résoudre deux équations :
$3x + 2 = 0$ OU $7x - 9 = 0$

Équation du type $x^2 = a$:

- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet **aucune solution**.
  (le carré d'un nombre est toujours positif)
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet **une unique solution : 0**.
  (le seul nombre dont le carré est nul est zéro)
- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet **deux solutions** : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Fonctions

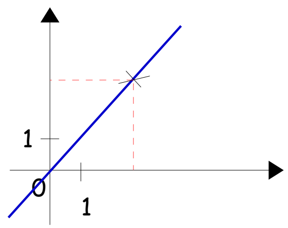
- <u>Fonction</u> : Machine qui fait des calculs

$$x \xmapsto{\text{Fonction } f} f\,(x)$$

antécédent   image

- <u>Fonction linéaire</u> : $f\,(x) = ax$ représentée par une droite passant par l'origine. Le tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité.

$$a = \frac{\textit{image}}{\textit{antécédent}}$$



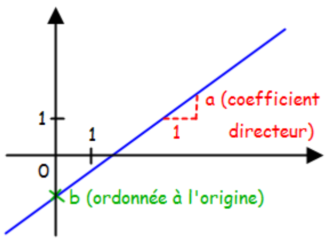
Pourcentages :

- Augmenter un nombre de a %, c'est le multiplier par $(1 + \frac{a}{100})$.
- Diminuer un nombre de a %, c'est le multiplier par $(1 - \frac{a}{100})$.

<u>Exemple :</u> Augmenter un prix P de 8 %, c'est le multiplier par

$(1 + \frac{8}{100}) = 1{,}08$. Soit, $f : P \longmapsto 1{,}08\,P$.

- <u>Fonction affine</u> : $f\,(x) = ax + b$ représentée par une droite.

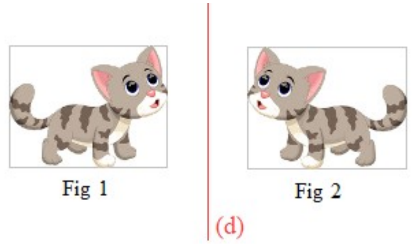


$$a = \frac{\textit{Différence des ordonnées}}{\textit{Différence des abscisses}} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Transformations

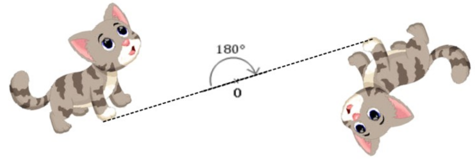
- <u>Symétrie axiale</u> :

Deux figures sont **symétriques par rapport à une droite (d)** lorsqu'elles se superposent par **pliage autour de la droite (d)**.



- <u>Symétrie centrale</u> :

Deux figures sont symétriques par rapport à un point signifie que, **en effectuant un demi-tour** autour de ce point, **les figures se superposent**.



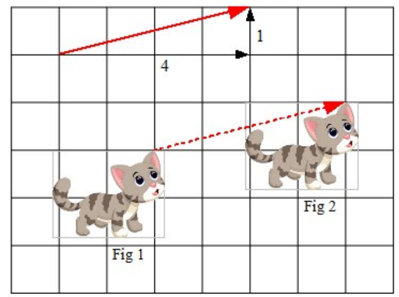
C'est une rotation d'angle 180°.

Le symétrique d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

- <u>Translation</u> :

Faire **glisser** la figure sans la tourner.

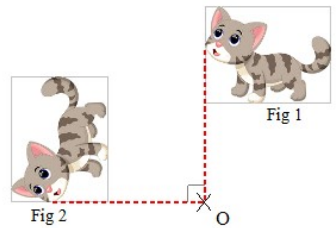
Ce glissement est défini par une **direction**, un **sens** et une **longueur**, schématisé par une flèche.



- <u>Rotation</u> :

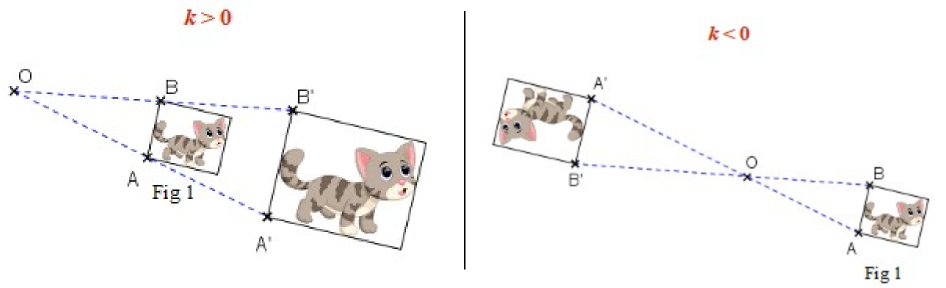
Faire **tourner** la figure autour d'un point.

Une rotation est définie par un **centre**, un **angle** de rotation et un **sens** de rotation (horaire ou antihoraire).



Propriété : Une figure et son image par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation ou une rotation sont **superposables**. Ces transformations conservent les **alignements**, les **angles**, les **longueurs** et les **aires**.

- Homothétie : **Agrandir** ou **Réduire** la figure en faisant **glisser** ses points le long de droites passant par O.



Une homothétie est définie par un **centre** et un **rapport** ***k*** non nul.

On retrouve, dans les deux cas, une configuration de **Thalès**.

Lorsque $k > 1$ (ou $k < -1$), l'homothétie correspond à un **agrandissement**.
Lorsque $0 < k < 1$ (ou $-1 < k < 0$), l'homothétie correspond à une **réduction**.

Propriété :

- Une figure et son image par une homothétie ont la **même forme**.

L'homothétie conserve les **alignements** et les **angles**.

- Par une homothétie de rapport $k > 0$, les **longueurs** sont multipliées par **k** et les **aires** par **k^2**.

Probabilités

- **Expérience aléatoire** : expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude. Chacun des résultats possibles de l'expérience est appelé **issue**.

- **Événement** : un ensemble d'issues que l'on peut obtenir lors d'une expérience aléatoire.

- La probabilité d'un événement A est égale à la **somme des probabilités des issues** qui le composent.
- **$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$**.
- La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience est égale à 1.

- Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'événement } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

- Événements **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent être réalisés en même temps : **$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$**.

- Événement **contraire** : événement qui se réalise lorsque l'événement A ne se réalise pas : **$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$**.

- Expérience aléatoire à deux épreuves :

Tableau à double entrée

Agrandissement et réduction

- Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

  - les longueurs sont multipliées par k,
  - les mesures d'angles sont conservées.

- Si $k > 1$, il s'agit d'un **agrandissement**.
- Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une **réduction**.
- Si $k = 1$, il s'agit d'une **reproduction**.

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

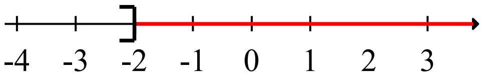
- l'aire d'une surface est multipliée par k^2 ,
- le volume d'un solide est multiplié par k^3 .

Inéquations

- Pour résoudre une inéquation, on peut :
  - ajouter ou soustraire le même nombre aux deux membres de l'inéquation.
  - multiplier ou diviser les deux membres de l'inéquation :
    - par un même nombre **strictement positif** **en conservant le sens** de l'inégalité.
    - par un même nombre **strictement négatif** mais **en changeant le sens** de l'inégalité.

Exemple : $-5x + 1 < 11$.

$$-5x + 1 - 1 < 11 - 1$$
$$-5x < 10$$
$$\frac{-5x}{-5} > \frac{10}{-5}$$
$$x > -2$$



Statistiques

- Moyenne = $\dfrac{\text{somme des données}}{\text{effectif total}}$

Exemple : $\dfrac{10\times2+11\times1+12\times2+13\times3+14\times1}{9} \approx 11{,}4$

- Médiane : nombre qui partage une série statistique en deux séries de même effectif. Attention : les valeurs doivent être rangées dans l'ordre **croissant** !!

$\underbrace{7 \quad 9 \quad 11 \quad 11}_{\text{4 données}} \quad \underbrace{12 \quad 17 \quad 18 \quad 18}_{\text{4 données}}$

Médiane = 11,5

$\underbrace{8 \quad 10 \quad 10 \quad 11}_{\text{4 données}} \quad 12 \quad \underbrace{12 \quad 13 \quad 13 \quad 14}_{\text{4 données}}$

Médiane = 12

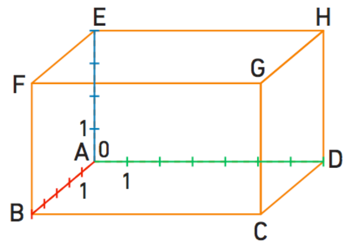
- Étendue : différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série.

Repérage dans l'espace

- Dans un pavé droit :

Abscisse, ordonnée et altitude.

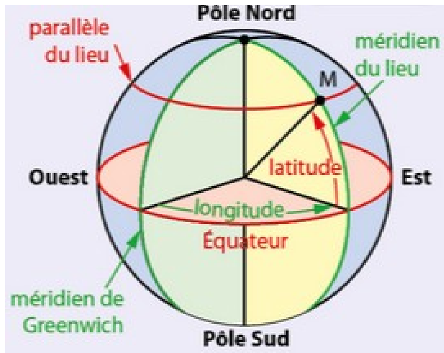
Exemple : G (7 ; 5 ; 4)



- Sur une sphère :

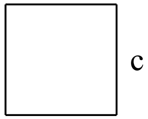
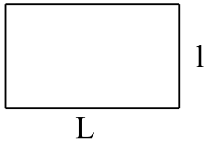
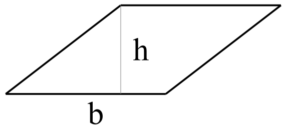
Latitude et longitude.

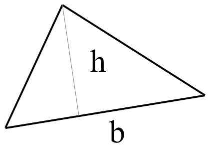
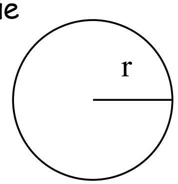
Les latitudes sont comprises entre 0° et 90° Nord ou Sud.
Les longitudes sont comprises entre 0° et 180° Est ou Ouest.



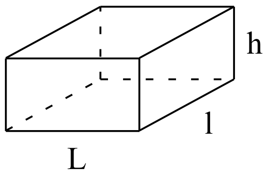
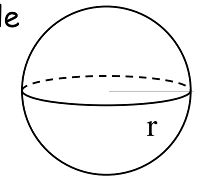
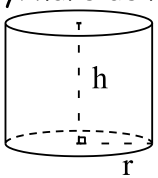
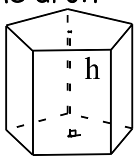
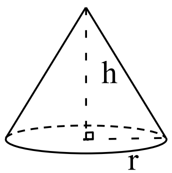
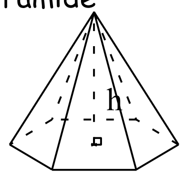
Aires et volumes

Aires :

Carré	Rectangle	Parallélogramme
		
$A = c \times c$	$A = L \times l$	$A = b \times h$

Triangle	Disque
$A = \frac{b \times h}{2}$ 	$A = \pi \times r^2$ 

Volumes :

Pavé droit  $V = L \times l \times h$	Boule  $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$
Cylindre de révolution  $V = \text{Aire base} \times h$	Prisme droit  $V = \text{Aire base} \times h$
Cône de révolution  $V = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$	Pyramide  $V = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$

Histogramme

Un histogramme représente des données numériques regroupées en **classes**.

Lorsque les classes ont la **même amplitude**, les hauteurs des rectangles d'un histogramme sont **proportionnelles** aux effectifs (ou fréquences) de chaque classe.

Taille des élèves de la classe